Physikalisches Fortgeschrittenenpraktikum

Einstein-de-Haas-Effekt

– Vorbereitung –

Armin Burgmeier   Robert Schittny

1 Einführung

Magnetisiert man einen ferromagnetischen Körper, so tritt dabei ein makroskopischer Drehimpuls des Körpers auf. Dieser Umstand ist der Drehimpulserhaltung geschuldet. Bei der Magnetisierung ändert sich der Spin der Elektronen in einem Material. Da der Spin aber ein Drehimpuls ist und der Gesamtdrehimpuls erhalten ist, wird die Drehimpulsänderung durch die Spinausrichtung durch eine Drehung des Körpers kompensiert. Zu einem kleineren Ausmaß trägt auch der Bahndrehimpuls der äußeren Elektronen um den Atomkern (der Bahndrehimpuls von allen Elektronen einer vollbesetzten Schale addiert sich zu 0) zum Gesamtdrehimpuls bei.

2 g-Faktor

Dieser Effekt lässt sich dazu verwenden, den Landéschen g-Faktor des Elektrons zu bestimmen, was auch das Ziel dieses Versuchs darstellt. Der g-Faktor steht mit dem gyromagnetischen Verhältnis $\gamma = \frac{\mu}{L}$ in Beziehung, wobei μ das magnetische Moment eines Teilchens und L sein Drehimpuls ist. g ist nun definiert als

$$g := \gamma \frac{2m}{q} \tag{1}$$

Betrachtet man ein Elektron, welches sich klassisch auf einer Kreisbahn um einen Kern dreht, so kann man mit einfachen Mitteln herleiten[1], dass für den Bahndrehimpuls bzw. das magnetische Bahnmoment $g_l = 1$ folgt. Für den Elektronenspin ergibt sich aus der relativistischen Quantenmechanik $g_s = 2$.

[1] Siehe Vorbereitungsmappe

Da der Einstein-de-Haas-Effekt (bzw. der Ferromagnetismus) hauptsächlich durch den Elektronenspin zustande kommt, erwarten wir auch einen Wert $g \approx 2$. Andersherum betrachtet können wir von dem im Versuch bestimmten g-Faktor diese Tatsache verifizieren.

3 Messprinzip

Um nun den g-Faktor zu bestimmen, brauchen wir im wesentlichen das magnetische Moment und den Gesamtdrehimpuls der Elektronen. Beide Größen sind experimentell aber nicht zugänglich. Im folgenden werden wir daher Verbindungen zwischen den mikroskopischen und messbaren Größen herstellen.

Da nach der Magnetisierung des Ferromagnets die magnetischen Momente aller ungepaarten Elektronen N gleich ausgerichtet sind, gilt für das gesamtmagnetische Moment des Körpers

$$\mu_{tot} = N\mu \tag{2}$$

Die ungepaarten Elektronen sind dabei die Außenelektronen der Atome. Wie an anderer Stelle bereits erwähnt summiert sich der Drehimpuls, und damit das magnetische Moment der inneren Elektronen zu 0. Da die magnetischen Momente alle ausgerichtet werden gilt das gleiche für die Drehimpulse, da magnetisches Moment und Drehimpuls immer parallel oder antiparallel zueinander stehen:

$$L_{tot} = NL \tag{3}$$

Aus dem Gesamtmoment kann man nun leicht die Magnetisierung M ausrechnen wenn das Volumen V des Körpers bekannt ist. Nach Definition der Magnetisierung gilt:

$$M = \frac{\mu_{tot}}{V} \tag{4}$$

Setzt man nun diese Beziehungen in die Definition für das gyromagnetische Verhältnis γ ein, dann erhält man g in Abhängigkeit von M und L_{tot}:

$$g = \frac{2m}{q}\frac{MV}{L_{tot}} \tag{5}$$

Beide Größen, L und M sind nun makroskopisch beobachtbar bzw. messbar. Da sie von der Zeit abhängen, g aber konstant ist, können wir die Gleichung auch nach der Zeit differenzieren und erhalten

$$g = \frac{2m}{q}\frac{\dot{M}V}{D} \tag{6}$$

mit $D = \dot{L}_{tot}$, dem Drehmoment das auf den Körper wirkt. Im Versuch sind nun im wesentlichen die beiden Größen $\dot{M}$ und D zu bestimmen. Am einfachsten wird die Bestimmung wenn beide gerade den Maximalwert erreicht haben.

4 Versuchsaufbau

Als ferromagnetischer Körper wird ein dünner Eisenstab verwendet. Dieser ist an einem dünnen Torsionsfaden befestigt und bildet so ein schwingfähiges System mit schwacher Dämpfung. Das System ist von einer langen Spule umgeben, die den Kern zu magnetisieren vermag. An die Spule kann eine Wechselspannung mit variabler Frequenz angelegt werden und so den Stab magnetisieren.

Die Änderung der Magnetisierung bewirkt nach dem Einstein-de-Haas-Effekt auch eine Änderung des Drehimpulses, also ein Drehmoment. Die Auslenkung des Systems wird mit einem Laser und einem sich mitdrehenden Spiegel gemessen.

5 Bestimmung von D und $\dot{M}$

5.1 Drehmoment

Das schwingfähige System aus Glasstab und Torsionsfaden lässt sich mit Hilfe folgender Differentialgleichung beschreiben:

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{D}{\theta}\cos(\omega_{err}) \tag{7}$$

Hierbei bezeichnet α die Auslenkung des Stabes, β die Dämpfungskonstate, ω_0 die Eigenfrequenz des Systems, θ das Trägheitsmoment und ω_{err} die Erregerfrequenz, die der Frequenz des Spulen-Wechselstroms entspricht.

In der Vorbereitungsmappe wird nun ausgehend von der Lösung der Gleichung die folgende Beziehung für D hergeleitet:

$$D = 2\beta\omega_{res}\alpha_{res}\theta \tag{8}$$

wobei ω_{res} die (experimentell zu ermittelnde) Resonanzfrequenz des Systems und α_{res} die größte Auslenkung bei dieser Frequenz ist.

5.2 Änderung der Magnetisierung

Nachdem der ferromagnetische Stab vom Magnetfeld $\mathbf{H}$ der äußeren Spule magnetisiert wurde, trägt seine Magnetisierung $\mathbf{M}$ auch zum gesamten magnetischen Feld $\mathbf{B}$ in der Spule bei. Es gilt

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9}$$

$\mathbf{H}$ kann mit Hilfe der bekannten Formel für das Magnetfeld einer langen Spule berechnet werden. Berücksichtigt man, dass wir einen Wechselstrom mit der Resoanzfrequenz ω_{res} der Schwingung anlegen werden, so ergibt sich mit der Windungzahl N und der Spulenlänge l:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{N}{l}\hat{I}\cos(\omega_{res}t) \tag{10}$$

Bei der Umpolung des Stabes treten Hystereseeffekte auf, das heißt wenn der Spulenstrom gerade einen Nulldurchgang hat, so ist im Stab immer noch eine Restmagnetisierung vorhanden. Für **M** gilt also keine solch einfache cosinusartige Beziehung. Sie ist allerdings immer noch periodisch mit der Periode der Wechselspannung. Das gilt natürlich auch für die zeitliche Änderung. Sie kann daher in eine Fourierreihe entwickelt werden. Dabei zeigt sich, dass der zweite Fourierkoeffizient keinen Beitrag liefert und alle weiteren so klein werden, dass sie vernachlässigbar sind.

Wie an anderer Stelle bereits erwähnt interessieren wir uns für den Maximalwert der Änderung der Magnetisierung, $\dot{M}_{max}$. Bei einer Fourierentwicklung die nach dem ersten Glied abgebrochen wird entspricht dies gerade dem ersten Fourierkoeffizienten $\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_1$, für den gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot \sin\left(\omega_{res} t\right) \tag{11}$$

Im Versuch wird die Änderung der Magnetisierung mit Hilfe der in einer zweiten Spule induzierten Spannung gemessen. N_2 bezeichne die Windungszahl dieser Spule und F_2 ihre Querschnittsfläche. Mit dem Faraday'schen Induktionsgesetz kann man davon ausgehend die in dieser Spule induzierte Spannung U_{ind} herleiten. Diese und weitere Rechnungen sind erneut in der Vorbereitungsmappe ausführlich beschrieben, daher wollen wir an dieser Stelle lediglich die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen. Für U_{ind} ergibt sich

$$-U_{ind} = \mu_0 N_2 \left(F_2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + F_0 \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right) \tag{12}$$

wobei F_0 die Querschnittsfläche des Stabes ist. Die Zeitabhängigkeit von H ist bekannt.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten weiterzumachen:

1. Man geht davon aus, dass die Ummagnetisierung schnell gegenüber der Periodendauer T ist, was einer harten Hysteresekurve entspricht. Im Grenzfall wird die Magnetisierungsänderung dann zu δ-Peaks an den Stellen wo Ummagnetisierung stattfindet, also näherungsweise beim Nulldurchgang des äußeren Feldes bzw. des Primärspulenstroms, d.h. bei $t_1 = \frac{T}{4}$ und bei $t_2 = 3\frac{T}{4}$. Es wird immer der gesamte Körper als magnetisiert betrachtet, sodass auch immer die Sättigungsmagnetisierung erreicht wird.

   Bezeichnet man die Sättigungsmagnetisierung mit M_S, so folgt

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_1 = -\frac{8M_S}{T} \tag{13}$$

   Die Sättigungsmagnetisierung wiederrum kann nun durch die Induktionsspannung in der Sekundärspule ausgedrückt werden. Da die Details wieder in der Vorbereitungsmappe zu finden sind geben wir hier nur das Ergebnis an:

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_1 = -\frac{4}{T\mu_0 N_2 F_0}\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, U_{ind} + \frac{8N_1\hat{I}}{Tl}\frac{F_2}{F_0} \tag{14}$$

Bis auf das Integral sind nun alle Größen bekannt (T ergibt sich aus der Resonanzfrequenz, N_1 ist die Windungszahl der Primärspule).

2. Die zweite Möglichkeit, die zudem etwas genauer ist, da man nicht die Voraussetzung scharfer Peaks der Magnetisierungsänderung bracht, ist es, die Gleichung für die Induktionsspannung nach $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ umzustellen und in Gleichung 11 einzusetzen. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)_1 = -\frac{1}{\mu_0 N_2 F_0} \left(U_{ind}\right)_1 \kappa + \frac{N_1 \hat{I} \omega_{res} F_2}{F_0 l} \tag{15}$$

wobei

$$\left(U_{ind}\right)_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \, U_{ind} \sin\left(\omega_{res} t\right) \tag{16}$$

der erste Fourierkoeffizient der Induktionsspannung ist. κ ist ein experimentell zu bestimmender Eichfaktor der bei der Bestimmung von $\left(U_{ind}\right)_1$ eine Rolle spielt.

6 Erdmagnetfeld

Bei dem Versuch ist es von essentieller Bedeutung, Magnetfeld der Erde abzuschirmen. Andernfalls wirkt auf den Stab aufgrund der Beziehung

$$\mathbf{D} = \mu \times \mathbf{B} \tag{17}$$

ein weiteres Drehmoment, das wie bei einem Kompass versucht den Stab antiparallel zum Erdmagnetfeld auszurichten. Allerdings spielt nur die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds eine Rolle. Die vertikale Komponente ist parallel zum magnetischen Moment des Stabes (da dieses entlang der Feldlinien in der Spule ausgerichtet ist) und das Kreuzprodukt ergibt somit 0. Es ist allerdings darauf zu achten, dass der Stab gut in der Spule zentriert ist, da das Magnetfeld an den Rändern der Spule weniger homogen ist.

Um die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds zu kompensieren wird die ganze Anordnung nun noch zwischen einem Paar von Helmholtzspulen angebracht. Das Helmholtzspulenpaar erzeugt ein homogenes Magnetfeld in der Mitte, wenn der Abstand gerade dem Radius der Spulen entspricht. Das Strom durch die Helmholtzspulen wird so gewählt, dass das Erdmagnetfeld gerade kompensiert wird.

7 Versuchsdurchführung

Mechanische Größen Im ersten Schritt des Versuchs werden die für die Bestimmung des Drehmoments benötigten Größen ermittelt. Dies sind im wesentlichen die Resonanzfrequenz ω_{res}, die Schwingungsamplitude bei der Resonanz α_{res} und die Dämpfungskonstante β. Dazu wählen wir einen festen effektiven Spulenstrom $I_{eff} = 0{,}6\,\mathrm{A}$

und variieren die Frequenz der Wechselspannung so lange, bis wir die Frequenz gefunden haben, bei der der Ausschlag maximal wird. Dies ist die Resonanzfrequenz. Danach schalten wir den Spulenstrom wieder ab und beobachten das Abklingen der Schwingung. Dazu können wir die Maximalausschläge $\hat{\alpha}$ und Zeitpunkte t ebenjener in den folgenden Perioden protokollieren und β aus einem Funktionsfit der Einhüllenden

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\,(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{18}$$

gewinnen.

Kompensation des Erdmagnetfelds Als nächstes bestimmen wir die nötige Stromstärke für das Helmholtzspulenpaar um das Erdmagnetfeld zu kompensieren. Dazu bestimmen wir zuerst mit Hilfe eines Kompasses seine Richtung: Das magnetische Moment der Nadel richtet sich antiparallel zu den Magnetfeldlinien aus. Die Helmholtzspulen werden dann so aufgestellt, dass die Feldlinien des durch sie erzeugten Feldes gerade in die andere Richtung ausgerichtet sind.

Dann legen wir an die Feldspule wieder eine effektive Stromstärke von $I_{eff} = 0{,}6$ A an. Das Erdmagnetfeld bewirkt ein zusätzliches Drehmoment auf den Stab, durch das die Auslenkung größer wird. Wir stellen den Gleichstrom durch die Helmholtzspulen daher nun so ein, dass die Auslenkung gerade minimal wird. In diesem Fall ist das Erdmagnetfeld vollständig kompensiert.

Eichung des Galvanometers und Bestimmung der Induktionsspannung Es handelt sich dabei um ein ballistisches Galvanometer welches den Strom, der während eines bestimmten Zeitraums fließt, integriert (also im wesentlichen die geflossene Ladung misst). Die Auslenkung des Galvanometers A_0 ist proportional zu dieser Ladung Q:

$$Q = kA_0 \tag{19}$$

Mit verschiedenen Testströmen lässt sich somit der Proportionalitätsfaktor k bestimmen. Mit diesem Wissen kann dann die Induktionsspannung an der Sekundärspule gemessen werden:

$$Q = \int \mathrm{d}t\, I = \frac{1}{R} \int \mathrm{d}t\, U_{ind} \tag{20}$$

wobei R der Widerstand im Stromkreis Spule/Galvanometer ist. Er ist in der Vorbereitungsmappe angegeben und beträgt

$$R = (37 + 9500 + 25)\ \Omega = 9562\,\Omega \tag{21}$$

Um den g-Faktor nach der ersten vorgestellten Methode zu berechnen muss der Wert des Integrals $\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t U_{ind}$ bestimmt werden. Statt einem Wechselstrom für die Feldspule verwenden wir nun einen Gleichstrom, der von $\hat{I} = \sqrt{2} I_{eff} = \sqrt{2} \cdot 0{,}6$ A auf 0 zurückgeht. Dieser Zeitraum entspricht gerade einer Viertel-Periode des Wechselstroms. Da wir annahmen, dass die Änderung der Magnetisierung nur als δ-Peak bei $t = \frac{T}{4}$ erfolgt gilt

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, U_{ind} = 2 \int_0^{\frac{T}{4}} \mathrm{d}t\, U_{ind} \tag{22}$$

Bestimmung des ersten Fourierkoeffizients der Induktionsspannung Für die zweite Methode zur Bestimmung des g-Faktors wird der erste Fourierkoeffizient der Indukutionsspannung $(U_{ind})_1$ benötigt. Dazu betreiben wir die Feldspule wieder mit Wechselspannung bei der Resonanzfrequenz und schließen die Sekundärspule an ein Oszilloskop an, auf dem U_{ind} über der Zeit aufgetragen wird. Die Daten werden an den Computer übertragen und dort gespeichert. Dann kann eine numerische Integration erfolgen.

Der Eichfaktor κ beträgt

$$\kappa = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, U_{ind}\,(\text{Gemessen mit dem Galvanometer})}{\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, U_{ind}\,(\text{Gemessen mit dem Oszilloskop})} \tag{23}$$

Das mit dem Galvanometer gemessene Integral wurde dazu bereits im vorherigen Aufgabenteil ermittelt, und das des Oszilloskops kann aus den gleichen Werten berechnet werden aus denen auch das Fourier-Integral gebildet wird.