

Protokoll zum Versuch „Geometrische Optik“ mit ausführlicher Fehlerrechnung

Kirstin Hübner Armin Burgmeier Gruppe 15

13. Oktober 2008

1 Brennweitenbestimmung

1.1 Kontrollieren der Brennweite

Wir haben die Brennweite einer dünnen Sammellinse mit angegebener Brennweite von $f \approx 15\text{cm}$ überprüft wie in der Vorbereitung beschrieben. Dabei haben wir folgende Abstände zwischen Linse und Schirm gemessen (durch mehrmalige Scharfstellung). Allerdings sahen wir nicht nur einen Lichtpunkt sondern den Glühdraht der Lichtquelle den wir scharfgestellt haben.

| Messung | Brennweite [cm] |
|---------|-----------------|
| 1 | 16,6 cm |
| 2 | 16,9 cm |
| 3 | 16,3 cm |
| 4 | 16,5 cm |
| 5 | 16,4 cm |
| 6 | 16,8 cm |
| 7 | 16,6 cm |
| 8 | 16,5 cm |
| 9 | 16,4 cm |

Tabelle 1: Mehrfach gemessene Brennweiten

Unseren ersten Messwert von $17,2\text{cm}$ entstand bei anderem Abstand zwischen Lampe und Linse. Indem wir die Linse so weit wie möglich von der Lichtquelle entfernt haben wollten wir in folgenden Messungen paralleler einfallende Lichtstrahlen erhalten.

Der Mittelwert der Messungen beträgt $\bar{x} = 16,56\text{cm}$. Die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1)$$

beträgt in unserem Fall $\sigma = 0,19cm$. Die Standardabweichung des Mittelwerts

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

ist $0,065cm$. Somit ergibt sich aus unseren Messungen die Brennweite zu $f = (16.56 \pm 0.065)cm$.

Systematische Fehlerquellen:

- Beim Ablesen der Schirmposition an der Millimeterskala nehmen wir einen Fehler von $\pm 0.05cm$ an.
- Die Lichtstrahlen fallen nicht komplett parallel auf die Linse, da der Abstand der Lichtquelle zur Linse dies nicht zuließ. Diesen Fehler versuchten wir zu minimieren indem wir die Linse möglichst weit von der Lichtquelle entfernten.
- Die optischen Elemente waren unter Umständen nicht ganz senkrecht zur optischen Achse ausgerichtet, da man sie in der Halterung beliebig drehen konnte.
- Das Scharfstellen des Leuchtflecks wies einen gewissen Toleranzbereich auf. Wir haben versucht die Mitte dieses Bereichs zu treffen.
- Die genaue Positionen der Bauteile liegt nicht notwendigerweise genau über der Messmarke. Diesen Faktor vernachlässigen wir in den Berechnungen, da er schwer bis unmöglich abzuschätzen ist.

Somit haben wir einen systematischen Fehler von $\pm 0.05cm$ und insgesamt ergibt sich eine Brennweite $f = (16.56 \pm 0.065 \pm 0.05)cm$. Die Herstellerangabe von $f \approx 15cm$ liegt damit nicht innerhalb unserer Fehlertoleranz, jedoch konnten wir nur einen der auftretenden systematischen Fehler abschätzen. Außerdem ist die Herstellerangabe auch nur ein Ungefährwert.

1.2 Messung der Brennweite nach dem Besselverfahren

1.2.1 Messung bei festem Abstand

Wir haben ein Dia durch die zu testende Linse auf den Schirm projiziert und die Linse so eingestellt, dass das Bild bei festem Abstand $e = 80cm$ zwischen Dia und Schirm scharf erscheint. Wie erwartet ist dies bei zwei Positionen der Fall, da $4f = 60cm$. Dabei war Position 1 der Linse die näher am Dia, Position 2 die näher am Schirm.

Die gemessenen Werte sind in Tabelle 1a (siehe Anhang) aufgeführt.

Die Brennweite f ergibt sich zu

$$f = \frac{1}{4} \left(e - \frac{(p_2 - p_1)^2}{e} \right) \quad (3)$$

wobei p_1 und p_2 die Position der Linse auf der Skala sind. Wir nehmen systematische Fehler von $\Delta e = 0,1\text{cm}$ und $\Delta p_{1,2} = 0,05\text{cm}$ an und verwenden die arithmetische Fehlerfortpflanzung für eine Größtfehlerabschätzung:

$$m_{sys} = \Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \Delta e + \left| \frac{\partial f}{\partial p_1} \right| \Delta p_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial p_2} \right| \Delta p_2 \quad (4)$$

Der statistische Fehler ergibt sich aus der Standardabweichung des Mittelwerts.

| Konfiguration | \bar{p}_1 [cm] | \bar{p}_2 [cm] | $f \pm m_{stat} \pm m_{sys}$ [cm] |
|-------------------------------|------------------|------------------|-----------------------------------|
| Lochblende und Blaufilter | 19,80 | 59,52 | $15,07 \pm 0,090 \pm 0,031$ |
| Lochblende und Rotfilter | 20,38 | 59,60 | $15,19 \pm 0,066 \pm 0,031$ |
| Scheibenblende und Rotfilter | 19,92 | 59,88 | $15,01 \pm 0,058 \pm 0,031$ |
| Scheibenblende und Blaufilter | 19,56 | 60,18 | $14,84 \pm 0,049 \pm 0,031$ |

Tabelle 2: Brennweiten für die verschiedenen Konfigurationen

Wegen verschiedener Abbildungsfehler haben wir die Messung mit verschiedenen Blenden und Filtern durchgeführt um die Veränderungen beobachten zu können. Wie erwartet ergibt sich für blaues Licht eine kleinere Brennweite als für rotes Licht (chromatische Aberration) und für achsenferne Einstrahlung eine kleinere Brennweite als für achsennahe Einstrahlung (sphärische Aberration).

Auch lässt sich beobachten, dass die kleinste Brennweite tatsächlich durch die Kombination Scheibenblende und Blaufilter hervorgerufen wird. Im Gegensatz dazu ist die Brennweite bei Lochblende und Rotfilter am größten.

Die Frage weshalb $e > 4f$ gelten muss lässt sich durch folgende Herleitung erklären. Aus der Linsenformel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (5)$$

mit Gegenstandsweite g und Bildweite b folgt mit dem Abstand zwischen Gegenstand und Bild $e = b + g$

$$g = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4ef}}{2} \quad (6)$$

Diese Gleichung hat nur für $e > 4f$ eine Lösung. Wenn $\frac{e}{f}$ zu groß ist wird das Bild in Position 2 sehr stark verkleinert, wodurch die Scharfstellung fast unmöglich wird.

1.2.2 Messung bei varrierendem Abstand

Wir haben nun den Abstand zwischen Dia und Schirm bei gleicher Konfiguration (Blaufilter und Lochblende) variiert. Die einzelnen Messwerte sind in Tabelle 1b im Anhang aufgeführt.

Für $e = 60\text{cm}$ fallen die beiden Positionen zusammen, da nun $e = 4f$ gilt. Im Experiment war zu beobachten, dass es einen etwa 3cm großen Bereich gibt in dem das Bild hinreichend scharf erscheint.

Die Fehlerrechnung wird wie in 1.2.1 vorgenommen.

| e [cm] | \bar{p}_1 [cm] | \bar{p}_2 [cm] | $f \pm m_{stat} \pm m_{sys}$ |
|----------|------------------|------------------|--------------------------------------|
| 70 | 21,50 | 47,83 | $(15,02 \pm 0,14 \pm 0,03)\text{cm}$ |
| 75 | 20,37 | 53,80 | $(15,02 \pm 0,05 \pm 0,03)\text{cm}$ |
| 85 | 19,20 | 65,27 | $(15,01 \pm 0,24 \pm 0,03)\text{cm}$ |
| 110 | 17,73 | 91,67 | $(15,07 \pm 0,23 \pm 0,04)\text{cm}$ |

Tabelle 3: Messung der Brennweiten bei unterschiedlichen Abständen e

Mit zunehmendem Abstand e wird das größere Bild noch größer und das kleinere Bild kleiner. Dies ist problematisch, da man die Schärfe des kleinen Bildes nur noch schwer beurteilen kann. So erklärt sich unter anderem auch, dass der statistische Fehler bei großem e höher ausfällt.

1.3 Brennweiten- und Hauptebenenabstandsbestimmung nach dem Abbéverfahren

1.3.1 Bestimmung der Gesamtbrennweite

Bei diesem Versuchsaufbau haben wir eine ein Zentimeter große Millimeterskala durch ein Linsensystem auf einen Schirm mit Millimeterpapier projiziert. Dabei haben wir den Abstand a der beiden Linsen im Linsensystem sowie den Abstand x zwischen Marke (fester Punkt am Linsensystem) und Dia variiert. Zudem haben wir die Messungen auch für das um 180° gedrehte Linsensystem vorgenommen um später den Hauptebenenabstand bestimmen zu können.

Bei jeder Konfiguration haben wir drei Messwerte aufgenommen (siehe Tabelle 1c im Anhang). Obige Tabelle gibt die jeweiligen Mittelwerte aus den drei Messungen an.

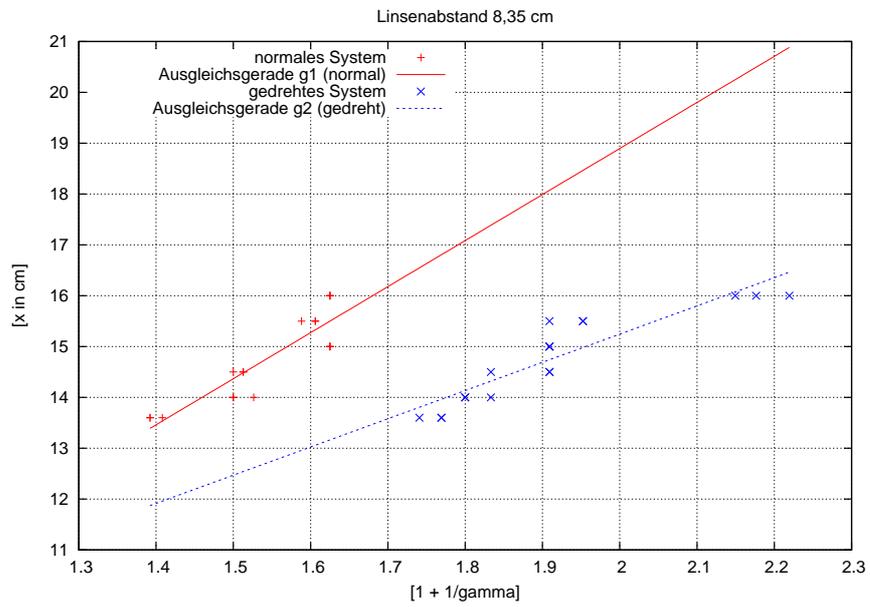
Wir tragen x über $1 + \frac{1}{\gamma}$ auf. Es gilt nach Linsengleichung und Abstandsdefinition $g = x - h$ (mit dem Abstand h zwischen Marke und Hauptebene) und $\gamma = \frac{b}{g}$:

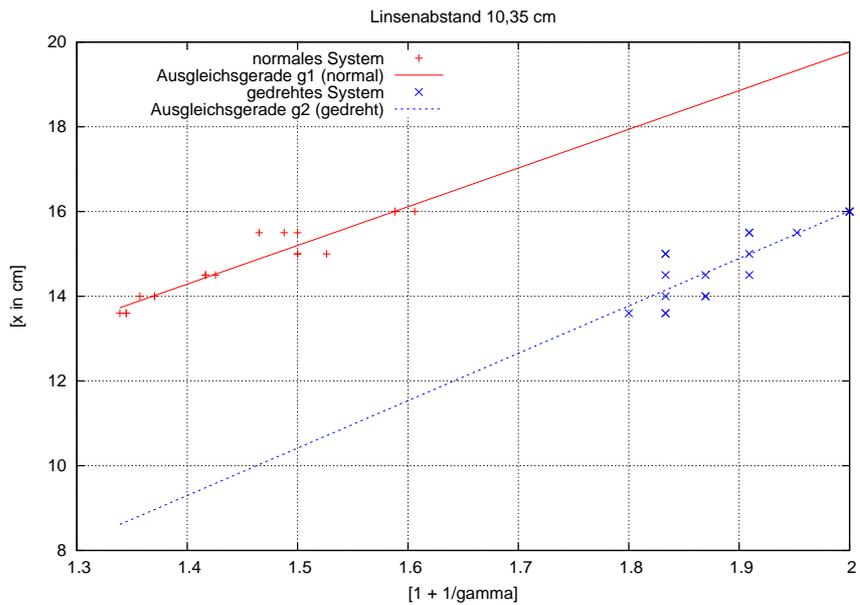
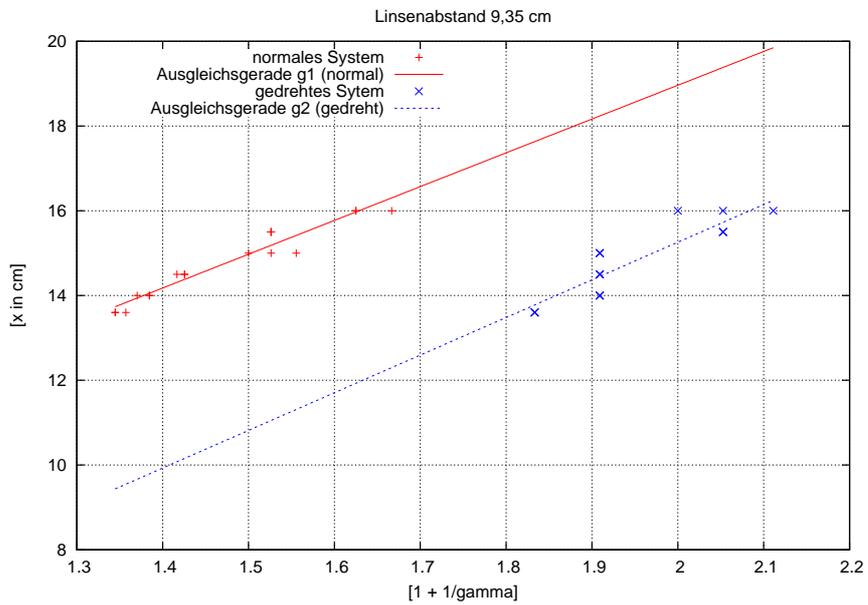
$$g = f\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = x - h \Leftrightarrow x = f\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + h \quad (7)$$

Somit können wir die Brennweite f des Gesamtsystems aus der Geradensteigung und den Abstand der Hauptebene zur Marke aus dem y-Achsenabschnitt ablesen.

| Linsenabstand a [cm] | x [cm] | Bildgröße [cm] | Bildgröße (gedreht) [cm] |
|------------------------|----------|----------------|--------------------------|
| 8,35 | 13,6 | 2,52 | 1,32 |
| 8,35 | 14,0 | 1,97 | 1,22 |
| 8,35 | 14,5 | 1,97 | 1,13 |
| 8,35 | 15,0 | 1,60 | 1,10 |
| 8,35 | 15,5 | 1,67 | 1,07 |
| 8,35 | 16,0 | 1,60 | 0,85 |
| 9,35 | 13,6 | 2,87 | 1,20 |
| 9,35 | 14,0 | 2,67 | 1,10 |
| 9,35 | 14,5 | 2,37 | 1,10 |
| 9,35 | 15,0 | 1,90 | 1,10 |
| 9,35 | 15,5 | 1,90 | 0,95 |
| 9,35 | 16,0 | 1,57 | 0,95 |
| 10,35 | 13,6 | 2,92 | 1,22 |
| 10,35 | 14,0 | 2,73 | 1,17 |
| 10,35 | 14,5 | 2,38 | 1,15 |
| 10,35 | 15,0 | 1,97 | 1,17 |
| 10,35 | 15,5 | 2,07 | 1,08 |
| 10,35 | 16,0 | 1,68 | 1,00 |

Tabelle 4: Gemessene Bildgrößen bei verschiedenen Linsenabständen





Die lineare Regression wurde mit gnuplot durchgeführt welches auch den statistischen Fehler berechnet hat. Für den systematischen Fehler haben wir $\Delta\gamma = 0,05\text{cm}$ und $\Delta x = 0,05\text{cm}$ angenommen und ihn mit arithmetischer Fehlerfortpflanzung berechnet.

| Linsenabstand [cm] | $\bar{f} \pm m_{stat} \pm m_{sys}$ [cm] |
|--------------------|---|
| 8,35 | $9,06 \pm 1,11 \pm 0,12$ |
| 8,35 (gedreht) | $5,55 \pm 0,64 \pm 0,15$ |
| 9,35 | $7,98 \pm 0,51 \pm 0,09$ |
| 9,35 (gedreht) | $8,89 \pm 1,10 \pm 0,23$ |
| 10,35 | $9,14 \pm 0,69 \pm 0,10$ |
| 10,35 (gedreht) | $11,19 \pm 1,79 \pm 0,26$ |

Tabelle 5: Ermittelte Gesamtbrennweiten für gedrehtes bzw. ungedrehtes Linsensystem

Da wir für jeden Linsenabstand eine Brennweite erhalten wollen mitteln wir die beiden Brennweiten für ungedrehtes und gedrehtes System. Nach der Fehlerfortpflanzung ergibt sich, dass wir den systematischen Fehler mitteln können und sich zu dem gemittelten statistischen Fehler noch die Standardabweichung des Mittelwerts addiert.

| Linsenabstand | $f \pm m_{stat} \pm m_{sys}$ |
|---------------|------------------------------|
| 8,35 | $7,31 \pm 2,63 \pm 0,14$ |
| 9,35 | $8,44 \pm 1,26 \pm 0,16$ |
| 10,35 | $10,17 \pm 2,27 \pm 0,18$ |

Tabelle 6: Gemittelte Gesamtbrennweiten

1.3.2 Bestimmung des Hauptebenenabstands

Der Hauptebenenabstand lässt sich durch $d = h + h'$ ausrechnen mit $h = x - f(1 + \frac{1}{\gamma})$. Der systematische Fehler ergibt sich wieder durch arithmetische Fehlerfortpflanzung, wobei wir die Messfehler mit $\Delta x = 0,05cm$, $\Delta \gamma = 0,05cm$ angenommen haben und Δf ist der systematische Fehler der jeweiligen Brennweite. Die statistischen Fehler der beiden Abstände der Hauptebene zur Marke erhielten wir durch lineare Regression und wurden für den statistischen Fehler des Hauptebenenabstands addiert.

| Linsenabstand [cm] | h [cm] | h' [cm] | $d \pm m_{stat} \pm m_{sys}$ |
|--------------------|--------|---------|------------------------------|
| 8,35 | 0,78 | 4,14 | $4,92 \pm 2,95 \pm 0,61$ |
| 9,35 | 3,01 | -2,51 | $0,50 \pm 2,91 \pm 0,72$ |
| 10,35 | 1,49 | -6,37 | $-4,88 \pm 4,39 \pm 0,78$ |

Tabelle 7: Hauptebenenabstände bei verschiedenen Linsenabständen

1.3.3 Bestimmung der Einzelbrennweiten

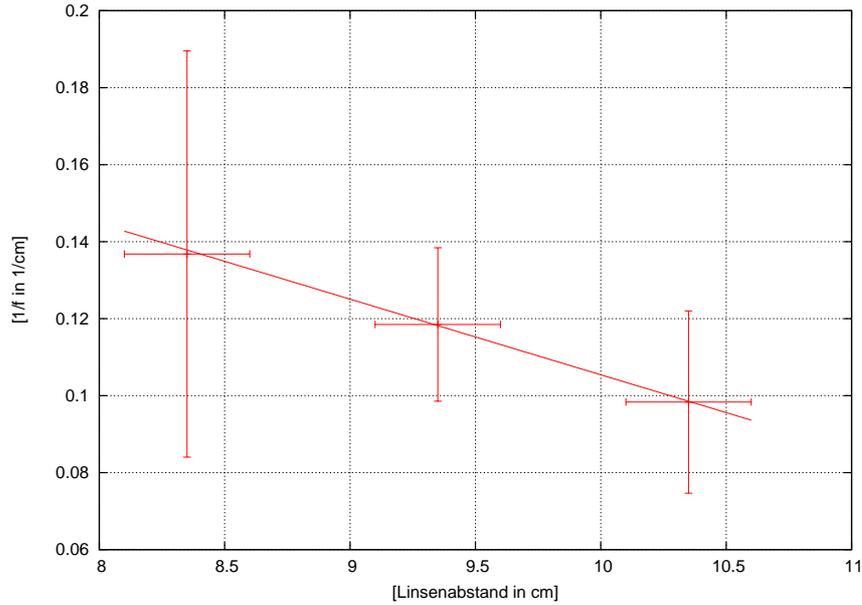
Tragen wir $\frac{1}{f}$ über den Linsenabstand a auf, so können wir durch Ablesen von der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt y_0 mit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2} \quad (8)$$

die Einzelbrennweiten zu

$$f_{1,2} = \frac{-y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 4m}}{2m} \quad (9)$$

bestimmen.



Es gilt $m = -0,020 \frac{1}{\text{cm}^2}$ und $y_0 = 0,302 \frac{1}{\text{cm}}$. Über die Abweichungen $\Delta m = 0,00063 \frac{1}{\text{cm}^2}$ und $\Delta y_0 = 0,00613 \frac{1}{\text{cm}}$ (aus der linearen Regression) lassen sich wieder mit arithmetischer Fehlerfortpflanzung Fehler für die Einzelbrennweiten bestimmen:

$$\Delta f_{1,2} = \left| -\frac{\sqrt{y_0^2 + 4m} \pm y_0}{2m\sqrt{y_0^2 + 4m}} \right| \Delta y_0 + \left| \frac{y_0}{2m^2} \pm \frac{\frac{2}{\sqrt{y_0^2 + 4m}} - \sqrt{y_0^2 + 4m}}{2m^2} \right| \Delta m \quad (10)$$

Es müssten an dieser Stelle eigentlich auch noch die Fehler der Gesamtbrennweiten f und der des Linsenabstands a eingehen. Uns ist jedoch nicht klar, wie dies rechnerisch zu bewerkstelligen ist.

Nach Einsetzen unserer Werte ergibt sich $f_1 = (4,83 \pm 15,962)\text{cm}$ und $f_2 = (10,53 \pm 14,84)\text{cm}$. Die sich ergebenden Fehler sind so groß, dass keine verlässliche Aussage zur Brennweite der Einzellinsen gemacht werden kann.

2 Bau optischer Instrumente

2.1 Fernrohr

Für das Keplersche Fernrohr haben wir für das Objektiv eine Sammellinse mit Brennweite $f_{\text{Objektiv}} = 30\text{cm}$ und für das Okular eine Sammellinse mit Brennweite $f_{\text{Okular}} = 5\text{cm}$ verwendet und wie in der Vorbereitung beschrieben aufgebaut. Dadurch ergibt sich also wie gewünscht eine Vergrößerung von

$$\Gamma_{\kappa} = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} = \frac{30\text{cm}}{5\text{cm}} = 6 \quad (11)$$

Um die Vergrößerung zu überprüfen betrachteten wir eine am anderen Ende des Raumes angebrachte Skala und verglichen den Sehausschnitt mit der Skala eines Lineals, das direkt neben die erste Linse gehalten wurde. Es ergaben sich folgende Messwerte:

| gesehene Länge Wand [cm] | gesehene Länge Lineal [cm] | Vergrößerung |
|--------------------------|----------------------------|--------------|
| 20 | 2,0 | 10 |
| 20 | 2,5 | 8 |
| 30 | 4,0 | 7,5 |
| 30 | 4,0 | 7,5 |

Tabelle 8: Messung der Vergrößerung des Keplerschen Fernrohrs

Diese Werte entsprechen nicht der errechneten Vergrößerung. Dies lässt sich vor allem auf das nur sehr ungenaue Messverfahren zurückführen, da das jeweilige Ablesen der Skalen mit einem großen Ablesefehler behaftet ist und die Messungen mehr einem Abschätzen gleichen. Trotzdem konnte man die Funktion des Fernrohrs bestätigen und wie vorhergesagt stand das Bild auf dem Kopf.

Auch das Galilei-Fernrohr haben wir wie in der Versuchsvorbereitung beschrieben aufgebaut und seine Funktionalität überprüft. Wie erwartet stand hier das Bild aufrecht, doch auch in diesem Fall wichen gemessene und berechnete Vergrößerung aus den oben genannten Punkten voneinander ab: Wir verwendeten für das Okular eine Zerstreuungslinse mit $f_{\text{Okular}} = -10\text{cm}$ und für das Objektiv eine Sammellinse mit $f_{\text{Objektiv}} = 30\text{cm}$, womit wir eine Vergrößerung um den Faktor 3 erhalten sollten.

2.2 Diaprojektor

Für den Diaprojektor errechneten wir in der Vorbereitung eine Brennweite der Sammellinse von $f' = 12,9\text{cm}$. Da uns keine solche Linse zur Verfügung stand und wir den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Abstand des Dias zum Schirm von $a = 1,5\text{m}$ beibehalten wollten, entschieden wir uns durch eine Kombination von zwei Linsen die gewünschte zehnfache Vergrößerung zu konstruieren. Nach einigem Probieren konnten wir mit folgendem Aufbau das 1cm große Objekt auf eine Bildgröße von $10,2\text{cm}$ vergrößern:

- Abstand Dia - Sammellinse L_1 mit Brennweite $f_1 = 20cm$: $4,5cm$
- Abstand Dia - Sammellinse L_2 mit Brennweite $f_2 = 15cm$: $16cm$

Die gemessene Vergrößerung von $10,2$ liegt damit unter der nach der Formel $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$ berechneten Vergrößerung von $12,74$, wobei $a = 11,5$ angenommen wurde. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass wir nur den Ort einer Linse mit der Brennweite $f = 12,9cm$ berechnen können, aber nicht wo genau die beiden Ersatzlinsen positioniert werden müssen.

2.3 Mikroskop

Für die Vergrößerung des Mikroskops gilt $V = \frac{ts_0}{f_{ok}f_{obj}}$ mit dem Abstand t zwischen Gegenstand und Objektiv (Auch Tubuslänge genannt), der Bezugssehweite des Auges $s_0 \approx 0,25cm$ und den Brennweiten von Objektiv und Okular f_1 und f_2 . Um also ein Mikroskop mit zwanzigfacher Vergrößerung zu bauen wählten wir erst eine Tubuslänge von $t = 40cm$, woraus sich $f_{ok}f_{obj} = \frac{ts_0}{V} = 50cm^2$ ergibt.

Daher wählten wir zwei Linsen mit $5cm$ und $10cm$ Brennweite. Diese montierten wir im gegebenen Abstand und variierten ihre Position anschließend geringfügig sodass wir ein gutes Bild erhielten. Es ergab sich eine Tubuslänge von $t = 41cm$.

Wir betrachteten wieder die Millimeterskala mit der wir bereits die Vergrößerung des Diaprojektors gemessen hatten durch das Mikroskop, hielten ein Lineal in gleicher Höhe neben das Mikroskop und bestimmten so die Vergrößerung. Wir haben folgende Werte festgestellt:

| Abschnitt auf Skala [cm] | Abschnitt auf Lineal [cm] | Vergrößerung |
|--------------------------|---------------------------|--------------|
| 0,1 | 0,5 | 5 |
| 0,1 | 0,5 | 5 |
| 0,2 | 1,5 | 7,5 |
| 0,2 | 1,8 | 9 |

Tabelle 9: Messung der Vergrößerung des Mikroskops

Die gewünschte Vergrößerung wurde also bei weitem nicht gemessen. Neben systematischen Fehlern in den Brennweiten der Linse, der Tubuslänge und dem sehr unzuverlässigen Messverfahren können hierfür auch verschiedene Bezugssehweiten s_0 unserer Augen verantwortlich sein, die von Mensch zu Mensch unterschiedlich ausfällt.